

复旦大学 2017 年本科外国留学生入学考试大纲

数 学

一、考试要求

考试对象为报考复旦大学的外国留学生,为复旦大学各院系录取新生提供考生知识能力方面的信息。数学考试旨在考查中学数学的基础知识、基本技能和思维能力、运算能力,以及运用有关数学知识分析问题和解决问题的能力。

二、考试形式

1、数学各部分内容在试卷中的占分比例

代数: 约 55%

三角: 约 15%

平面解析几何: 约 25%

立体几何: 约 5%

2、题型比例

填空题和选择题: 占总分 60%左右

解答题: 占总分 40%左右

3、考试时间及总分

时间: 150 分钟

总分: 150 分

三、考试内容

(一) 代 数

1、集合与函数

- (1) 理解集合及其表示,掌握子集、交集、并集、补集的概念,了解空集和全集的意义,了解属于、包含、相等关系的意义,能掌握有关的术语和符号,能正确表示一些简单的集合。
- (2) 理解函数的概念,掌握函数的表示方法,能求一些函数的解析式和定义域。
- (3) 了解反函数的意义,会求一些简单函数的反函数。
- (4) 掌握函数的奇偶性和单调性的概念以及它们图像特征,能判断一些函数的单调性、奇偶性。并且会利用单调性求一些函数的值域。
- (5) 理解一次函数、反比例函数的概念,掌握它们的图像和性质,会求它们的解析式。理解二次函数的概念,掌握它的图像和性质,会求它的解析式及最大值和最小值,

能灵活运用二次函数的性质解决有关问题。

- (6) 理解指数与对数的概念，掌握有关的性质和运算法则。
- (7) 理解幂函数、指数函数、对数函数的概念，掌握它们的图像和性质，解决与之相关的问题。

2、不等式

- (1) 掌握不等式的性质及其应用，会用基本不等式求一些函数的最值。
- (2) 掌握一元一次不等式（组）、一元二次不等式的解法；会解简单的分式不等式；了解区间的概念。了解绝对值不等式的性质，会解简单的绝对值不等式。
- (3) 会解一些含参数的不等式。

3、数列与极限

- (1) 了解数列有关概念。
- (2) 理解等差数列与等比数列的概念，掌握等差数列与等比数列的通项及前 n 项和的公式，并运用公式解决有关问题。
- (3) 了解数列极限的意义和几个常见数列的极限，会利用数列极限的四则运算法则，计算一些数列的极限；掌握公比的绝对值小于 1 的无穷等比数列的所有项和的公式。

4、复数初步

- (1) 了解数的概念的扩展，理解复数的有关概念。
- (2) 掌握复数的四则运算，应用加法、减法运算的几何意义解决有关问题。

5、平面向量

- (1) 理解平面向量的概念，理解向量的加法、减法、实数与向量的乘法的定义和几何意义；
- (2) 掌握向量的坐标表示法，向量与向量的数量积的定义，掌握他们的运算法则，并且能应用它们解决一些简单问题。

6、排列组合、二项式定理

- (1) 了解分类计数原理和分步计数原理，了解排列组合的概念，会用排列数、组合数的计算公式，会解排列、组合的简单应用题。
- (2) 掌握二项式定理和二项式系数的性质，并能用它们计算一些简单问题。

7、概率

- (1) 了解随机事件及其概率；
- (2) 了解等可能事件的概率的意义，会用计数方法和排列组合基本公式计算一些等可能事件的概率；
- (3) 了解互斥事件的意义，会用互斥事件的概率加法公式，计算一些事件的概率；
- (4) 了解相互独立事件的意义，会用相互独立事件的概率乘法公式计算一些事件的概率；

- (5) 会计算在 n 次独立重复试验中，某件事恰好发生 k 次的概率。

(二) 三角

8、三角比

- (1) 了解正角、负角、零角的概念，理解象限角和终边相同的角的概念，理解弧度的意义，并能正确地进行弧度和角度的换算。
- (2) 掌握任意角三角比的定义，三角比的符号，同角三角比的关系式与诱导公式。
- (3) 掌握两角和与差的余弦、正弦、正切，二倍角的正弦、余弦和正切公式，会应用它们进行计算、化简。
- (4) 掌握正弦定理、余弦定理和三角形面积公式，并应用这些公式解斜三角形。

9、三角函数的图像和性质

- (1) 掌握正弦函数、余弦函数的图像和性质，会用它们解决有关问题；了解正切函数的图像和性质。
- (2) 了解函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 与 $y = \sin x$ 的图像之间的关系，会求函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的周期、最大值和最小值。

(三) 平面解析几何

10、直线

- (1) 掌握直线的倾斜角和斜率的概念、过两点的直线的斜率公式，两条直线的平行和垂直的判断办法。
- (2) 掌握直线方程的几种形式，会求两条直线的交点和夹角，掌握点到直线距离公式，会用他们解决有关问题。

11、圆锥曲线

- (1) 曲线和方程：掌握直角坐标系中的曲线与方程的关系和轨迹的概念，能够根据所给条件，选择适当的坐标系求曲线方程，并画出方程所表示的曲线。
- (2) 圆：掌握圆的标准方程和一般方程，熟练掌握直线与圆的位置关系。
- (3) 椭圆：掌握椭圆的标准方程和几何性质。能用定义解决一些问题。
- (4) 双曲线：掌握双曲线的标准方程和几何性质。能用定义解决一些问题。
- (5) 抛物线：掌握抛物线的标准方程和几何性质，能用定义解决一些问题。

(四) 立体几何

12、理解平面的基本性质，了解空间图形在平面内的表示方法，会用斜二测画法画水平放置的平面图形的直观图。

13、了解空间两条直线的平行关系，直线平行关系的传递性；了解直线和平面，平面和平面平行的概念。掌握两个平面垂直的判定定理和性质定理。

- 14、理解异面直线的概念，掌握异面直线的夹角，垂直的概念。
- 15、掌握斜线在平面上的射影，直线和平面所成角的概念。三垂线定理及其逆定理。
- 16、了解圆柱、圆锥、球的概念和性质，掌握直柱体、锥体的侧面积和表面积以及体积，球的表面积和体积公式。

数 学 样 卷 (满 分 150 分)

考生姓名: _____

得分: _____

一、选择题 (每小题 4 分, 共 48 分)

- 1、已知 $A = \{x \mid x+1 > 0\}$, $B = \{-2, -1, 0, 1\}$, 则 $(C_R A) \cap B =$ ()
- A、 $\{-2, -1\}$ B、 $\{-2\}$ C、 $\{-1, 0, 1\}$ D、 $\{0, 1\}$
- 2、复数 $z = \frac{(2-i)^2}{i}$ (i 为虚数单位), 则 $|z| =$ ()
- A、25 B、 $\sqrt{41}$ C、5 D、 $\sqrt{5}$
- 3、若某公司从五位大学毕业生甲、乙、丙、丁、戊中录用三人, 这五人被录用的机会均等, 则甲或乙被录用的概率为 ()
- A、 $\frac{2}{3}$ B、 $\frac{2}{5}$ C、 $\frac{3}{5}$ D、 $\frac{9}{10}$
- 4、抛物线 $y^2 = 8x$ 的焦点到直线 $x - \sqrt{3}y = 0$ 的距离是 ()
- A、 $2\sqrt{3}$ B、2 C、 $\sqrt{3}$ D、1
- 5、不等式 $|x^2 - 2| < 2$ 的解集是 ()
- A、 $(-1, 1)$ B、 $(-2, 2)$ C、 $(-1, 0) \cup (0, 1)$ D、 $(-2, 0) \cup (0, 2)$
- 6、已知 $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$, 则双曲线 $C_1: \frac{x^2}{\sin^2 \theta} - \frac{y^2}{\cos^2 \theta} = 1$ 与 $C_2: \frac{y^2}{\cos^2 \theta} - \frac{x^2}{\sin^2 \theta} = 1$ 的 ()
- A、实轴长相等 B、虚轴长相等
C、离心率相等 D、焦距相等
- 7、已知函数 $f(x) = \ln(\sqrt{1+9x^2} - 3x) + 1$, 则 $f(\lg 5) + f(\lg \frac{1}{5}) =$ ()
- A、-1 B、0 C、1 D、2

20、设 a 为实常数， $y = f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，当 $x < 0$ 时， $f(x) = 9x + \frac{a^2}{x} + 7$ ，

若 $f(x) \geq a + 1$ 对一切 $x \geq 0$ 成立，则

一个对称中心到最近的对称轴的距离为 $\frac{\pi}{4}$ 。

(1) 求 ω 的值;

(2) 求 $f(x)$ 在区间 $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$ 上的最大值和最小值。

24、(13分) 已知函数 $f(x) = x^2 + (x-1)|x-a|$

(1) 若 $a = -1$ ，解方程 $f(x) = 1$;

(2) 若函数 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增，求实数 a 的取值范围;

(3) 是否存在实数 a ，使得 $g(x) = f(x) - x|x|$ 在 \mathbf{R} 上奇函数或是偶函数? 若存在，求出 a 的值，若不存在，请说明理由。

25、(13分) 抛物线 $E: y^2 = 4x$ 的焦点为 F ，准线 l 与 x 轴的交点为 A ，点 C 在抛物线 E 上，

以 C 为圆心， $|CO|$ 为半径作圆，设圆 C 与准线 l 交于不同的两点 M, N

(1) 若点 C 的纵坐标为 2 ，求 $|MN|$ ；

(2) 若 $|AF|^2 = |AM| \cdot |AN|$ ，求圆 C 的半径。

参考答案

一、选择题

1、A 2、C 3、D 4、D 5、D 6、D
7、D 8、D 9、A 10、D 11、C 12、B

二、填空题

13、8 14、 $\log_3 4$ 15、 $\frac{\pi}{6}$ 16、 $\frac{13}{2}$
17、 $-\frac{17}{31}$ 18、3 19、 $[-1, 2]$ 20、 $(-\infty, -\frac{8}{7}]$

三、解答题

21、解：(1) $a = 2$

$$(2) \text{ 由已知 } \begin{cases} a+1 \leq 3 \\ a-1 \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \leq 2 \\ a \geq 2 \end{cases} \Rightarrow a = 2$$

22、解：(1) $d = -1$ 或 $d = 4$

$$a_n = -n + 11 \text{ 或 } a_n = 4n + 6$$

$$(2) S_n = \begin{cases} -\frac{1}{2}n^2 + \frac{21}{2}n & (n \leq 11) \\ \frac{1}{2}n^2 - \frac{21}{2}n + 110 & (n \geq 12) \end{cases}$$

$$23、\text{解：(1) } f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} \frac{1 - \cos 2\omega x}{2} - \frac{1}{2} \sin 2\omega x$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2\omega x - \frac{1}{2} \sin 2\omega x$$

$$= \cos(2\omega x + \frac{\pi}{6}), \because \frac{T}{4} = \frac{\pi}{4}, \therefore T = \pi, \frac{2\pi}{2\omega} = \pi, \therefore \omega = 1$$

$$(2) \quad , \quad x \in [\pi, \frac{3\pi}{2}], \quad 2x + \frac{\pi}{6} \in [2\pi + \frac{\pi}{6}, 3\pi + \frac{\pi}{6}]$$

$$f(x) \text{ 的最小值为 } -1, \quad f(x) \text{ 的最大值为 } \frac{\sqrt{3}}{2}$$

24、解：(1) $\{x \mid x \leq -1 \text{ 或 } x = 1\}$

$$(2) f(x) = \begin{cases} 2x^2 - (a+1)x + a & (x \geq a) \\ (a+1)x - a & (x < a) \end{cases}, \text{ 根据函数图像, 知 } f(x) \text{ 在 } R \text{ 上单调递增, 所}$$

$$\text{以 } \begin{cases} \frac{a+1}{4} \leq a \\ a+1 > 0 \end{cases} \Rightarrow a \geq \frac{1}{3}$$

(3) 由于 $g(x) = x^2 + (x-1)|x-a| - x|x|$

$g(1) = 0, g(-1) = 0$, 得 $a = 0$ 或 -2 ,

所以 $a = 0$ 时, $g(x) = x^2 - |x|$ 是偶函数; 当 $a = -2$ 时, $g(x)$ 为非奇非偶函数。

25、解: (1) 点 C 的坐标为 $(1, 2)$, 圆半径 $r = |OC| = \sqrt{5}$,

$$\left| \frac{1}{2}MN \right|^2 = r^2 - (1+1)^2 = 5 - 4 = 1, \therefore MN = 2$$

(2) 设 $C\left(\frac{b^2}{4}, b\right)$, $r^2 = \frac{b^4}{16} + b^2$, 圆方程为 $(x - \frac{b^2}{4})^2 + (y - b)^2 = \frac{b^4}{16} + b^2$

当 $x = -1$ 时, 得 $y_M = b + \sqrt{\frac{b^2}{2} - 1}, y_N = b - \sqrt{\frac{b^2}{2} - 1}$, 因为

$$|AF|^2 = |AM| \cdot |AN|, (b + \sqrt{\frac{b^2}{2} - 1})(b - \sqrt{\frac{b^2}{2} - 1}) = 4, \text{ 化简得 } b^2 = 6,$$

$$\therefore r^2 = \frac{33}{4}, r = \frac{\sqrt{33}}{2}$$