复旦大学2018年本科外国留学生入学考试大纲

数 学

一、考试要求

考试对象为报考复旦大学的外国留学生，为复旦大学各院系录取新生提供考生知识能力方面的信息。数学考试旨在考查中学数学的基础知识、基本技能和思维能力、运算能力，以及运用有关数学知识分析问题和解决问题的能力。

二、考试形式

1、数学各部分内容在试卷中的占分比例

代数：约 55%

三角：约 15%

平面解析几何：约 25%

立体几何：约 5%

2、题型比例

填空题和选择题：占总分 60%左右

解答题：占总分 40%左右

3、考试时间及总分

时间：150 分钟

总分：150 分

三、考试内容

（一）代　数

1、集合与函数

（1）　理解集合及其表示，掌握子集、交集、并集、补集的概念，了解空集和全集的意义，了解属于、包含、相等关系的意义，能掌握有关的术语和符号，能正确表示一些简单的集合。

（2）　理解函数的概念，掌握函数的表示方法，能求一些函数的解析式和定义域。

（3）　了解反函数的意义，会求一些简单函数的反函数。

（4）　掌握函数的奇偶性和单调性的概念以及它们图像特征，能判断一些函数的单调性、奇偶性。并且会利用单调性求一些函数的值域。

（5）　理解一次函数、反比例函数的概念，掌握它们的图像和性质，会求它们的解析式。理解二次函数的概念，掌握它的图像和性质，会求它的解析式及最大值和最小值，

能灵活运用二次函数的性质解决有关问题。

（6） 理解指数与对数的概念，掌握有关的性质和运算法则。

（7） 理解幂函数、指数函数、对数函数的概念，掌握它们的图像和性质，解决与之相关的问题。

2、不等式

（1） 掌握不等式的性质及其应用，会用基本不等式求一些函数的最值。

（2） 掌握一元一次不等式（组）、一元二次不等式的解法；会解简单的分式不等式；了解区间的概念。了解绝对值不等式的性质，会解简单的绝对值不等式。

（3） 会解一些含参数的不等式。

3、数列与极限

（1） 了解数列有关概念。

（2） 理解等差数列与等比数列的概念，掌握等差数列与等比数列的通项及前 n 项和的公式，并运用公式解决有关问题。

（3） 了解数列极限的意义和几个常见数列的极限，会利用数列极限的四则运算法则，计算一些数列的极限；掌握公比的绝对值小于 1 的无穷等比数列的所有项和的公式。

4、复数初步

（1） 了解数的概念的扩展，理解复数的有关概念。

（2） 掌握复数的四则运算，应用加法、减法运算的几何意义解决有关问题。

5、平面向量

（1） 理解平面向量的概念，理解向量的加法、减法、实数与向量的乘法的定义和几何意义；

（2） 掌握向量的坐标表示法，向量与向量的数量积的定义，掌握他们的运算法则，并且能应用它们解决一些简单问题。

6、排列组合、二项式定理

（1） 了解分类计数原理和分步计数原理，了解排列组合的概念，会用排列数、组合数的计算公式，会解排列、组合的简单应用题。

（2） 掌握二项式定理和二项式系数的性质，并能用它们计算一些简单问题。

7、概率

（1） 了解随机事件及其概率；

（2） 了解等可能事件的概率的意义，会用计数方法和排列组合基本公式计算一些等可能事件的概率；

（3） 了解互斥事件的意义，会用互斥事件的概率加法公式，计算一些事件的概率；

（4） 了解相互独立事件的意义，会用相互独立事件的概率乘法公式计算一些事件的概率；

（5） 会计算在 n 次独立重复试验中，某件事恰好发生 k 次的概率。

（二）三　角

8、三角比

（1） 了解正角、负角、零角的概念，理解象限角和终边相同的角的概念，理解弧度的意义，并能正确地进行弧度和角度的换算。

（2） 掌握任意角三角比的定义，三角比的符号，同角三角比的关系式与诱导公式。

（3） 掌握两角和与差的余弦、正弦、正切，二倍角的正弦、余弦和正切公式，会应用它们进行计算、化简。

（4） 掌握正弦定理、余弦定理和三角形面积公式，并应用这些公式解斜三角形。

9、三角函数的图像和性质

（1） 掌握正弦函数、余弦函数的图像和性质，会用它们解决有关问题；了解正切函数的图像和性质。

（2） 了解函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 与 $y=\sin x$ 的图像之间的关系，会求函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的周期、最大值和最小值。

（三）平面解析几何

10、直线

（1） 掌握直线的倾斜角和斜率的概念、过两点的直线的斜率公式，两条直线的平行和垂直的判断办法。

（2） 掌握直线方程的几种形式，会求两条直线的交点和夹角，掌握点到直线距离公式，会用他们解决有关问题。

11、圆锥曲线

（1） 曲线和方程：掌握直角坐标系中的曲线与方程的关系和轨迹的概念，能够根据所给条件，选择适当的坐标系求曲线方程，并画出方程所表示的曲线。

（2） 圆：掌握圆的标准方程和一般方程，熟练掌握直线与圆的位置关系。

（3） 椭圆：掌握椭圆的标准方程和几何性质。能用定义解决一些问题。

（4） 双曲线：掌握双曲线的标准方程和几何性质。能用定义解决一些问题。

（5） 抛物线：掌握抛物线的标准方程和几何性质，能用定义解决一些问题。

（四）立体几何

12、理解平面的基本性质，了解空间图形在平面内的表示方法，会用斜二测画法画水平放置的平面图形的直观图。

13、了解空间两条直线的平行关系，直线平行关系的传递性；了解直线和平面，平面和平面平行的概念。掌握两个平面垂直的判定定理和性质定理。

14、理解异面直线的概念，掌握异面直线的夹角，垂直的概念。

15、掌握斜线在平面上的射影，直线和平面所成角的概念。三垂线定理及其逆定理。

16、了解圆柱、圆锥、球的概念和性质，掌握直柱体、锥体的侧面积和表面积以及体积，球的表面积和体积公式。

数 学 样 卷（满分 150 分）

考生姓名:_______________　　　　　　　　　　　　得分:________

一、选择题（每小题 4 分，共 48 分）

1、已知 $A=\{x|x+1>0\},B=\{-2,-1,0,1\}$，则 $(C_R A)\cap B=$（）

A、$\{-2,-1\}$　　B、$\{-2\}$　　C、$\{-1,0,1\}$　　D、$\{0,1\}$

2、复数 $z=\dfrac{(2-i)^2}{i}$(i 为虚数单位)，则 $|z|=$（）

A、25　　B、$\sqrt{41}$　　C、5　　D、$\sqrt{5}$

3、若某公司从五位大学毕业生甲、乙、丙、丁、戊中录用三人，这五人被录用的机会均等，则甲或乙被录用的概率为（）

A、$\dfrac{2}{3}$　　B、$\dfrac{2}{5}$　　C、$\dfrac{3}{5}$　　D、$\dfrac{9}{10}$

4、抛物线 $y^2=8x$ 的焦点到直线 $x-\sqrt{3}y=0$ 的距离是（）

A、$2\sqrt{3}$　　B、2　　C、$\sqrt{3}$　　D、1

5、不等式 $|x^2-2|<2$ 的解集是（）

A、$(-1,1)$　　B、$(-2,2)$　　C、$(-1,0)\cup(0,1)$　　D、$(-2,0)\cup(0,2)$

6、已知 $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$，则双曲线 $C_1:\dfrac{x^2}{\sin^2\theta}-\dfrac{y^2}{\cos^2\theta}=1$ 与 $C_2:\dfrac{y^2}{\cos^2\theta}-\dfrac{x^2}{\sin^2\theta}=1$ 的（）

A、实轴长相等　　B、虚轴长相等

C、离心率相等　　D、焦距相等

7、已知函数 $f(x)=\ln(\sqrt{1+9x^2}-3x)+1$，则 $f(\lg 5)+f(\lg\dfrac{1}{5})=$（）

A、-1　　B、0　　C、1　　D、2

8、设$a=\log_3 6, b=\log_5 10, c=\log_7 14$，则（）

A、$c>b>a$　　B、$b>c>a$
C、$a>c>b$　　D、$a>b>c$

9、已知点$A(-1,1), B(1,2), C(-2,-1), D(3,4)$,则向量$\overrightarrow{AB}$在$\overrightarrow{CD}$方向上的投影为（）

A、$\frac{3\sqrt{2}}{2}$　B、$\frac{3\sqrt{15}}{2}$　C、$-\frac{3\sqrt{2}}{2}$　D、$-\frac{3\sqrt{15}}{2}$

10、若$(1-2x)^6=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_6x^6$，则$|a_0|+|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_6|$的值为（）

A、1　B、64　C、243　D、729

11、已知函数$f(x)=\begin{cases}-1, & x<0\\ 1, & x\ge 0\end{cases}$，则不等式$xf(x-1)\le 1$的解集为（）

A、$[-1,+\infty)$　B、$(-\infty,1]$ C、$[-1,1]$ D、$[1,2]$

12、已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左焦点为$F$，$C$与过原点的直线相交于$A,B$两点，连接$AF,BF$.若$|AB|=10,|BF|=8,\cos\angle ABF=\frac{4}{5}$,则C的离心率为（）

A、$\frac{3}{5}$　B、$\frac{5}{7}$　C、$\frac{6}{7}$　D、$\frac{4}{5}$

二、填空题（每小题 5 分，40 分）

13、从n个正整数$1,2,\cdots,n$中任意取出两个不同的数，若取出的两数之和等于5的概率为$\frac{1}{14}$，则$n=$______

14、方程$\frac{3}{3^x-1}+\frac{1}{3}=3^{x-1}$的实数解为__________________

15、在ΔABC中，内角A,B,C的边长分别为a,b,c，若$a\sin B\cos C+c\sin B\cos A=\frac{1}{2}b$，且$a>b$，则$\angle B=$ _________________

16、已知直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的6个顶点都在球O的球面上，若$AB=3, AC=4$，$AB\perp AC$，$AA_1=12$，则球O的半径为___________________________

17、已知$\sin\alpha=-\frac{7}{25},\alpha\in(\pi,\frac{3}{2}\pi)$，则$\tan(\alpha-\frac{\pi}{4})=$____________________

18、若圆$x^2+y^2=R^2(R>0)$和曲线$\frac{|x|}{3}+\frac{|y|}{4}=1$恰有六个公共点，则$R$的值是__________________

19、已知函数$f(x)=-x^2+4x, x\in[m,5]$ 的值域是$[-5,4]$ ，则实数m 的取值范围是

____

20、设a为实常数，$y=f(x)$是定义在R上的奇函数，当$x<0$时，$f(x)=9x+\frac{a^2}{x}+7$，

若$f(x)\ge a+1$对一切$x\ge 0$成立，则a的取值范围为____________________

三、解答题（本大题共有 5 个小题，共 62 分）

21、（12 分）已知命题$p:x\in A=\{x|a-1<x<a+1,x\in R\}$，

命题$q:x\in B=\{x|x^2-4x+3\ge 0,x\in R\}$.

（1） 若$A\cap B=\varnothing,A\cup B=R$,求实数a的值；

（2） 若$\neg q$（q的否命题）是p的必要条件，求实数a的值。

22、（12 分）在公差为d的等差数列$\{a_n\}$中，已知$a_1=10$，且$a_1,2a_2+2,5a_3$成等比数列。

（1）求d,a_n；

（2）若$d<0$，求$|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_n|$

23、（12 分）设函数$f(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}\sin^2\omega x-\sin\omega x\cos\omega x\ (\omega>0)$，且$y=f(x)$图像的

一个对称中心到最近的对称轴的距离为$\dfrac{\pi}{4}$。

（1）求ω的值；

（2）求$f(x)$在区间$[\pi,\dfrac{3\pi}{2}]$上的最大值和最小值。

24、（13 分）已知函数$f(x)=x^2+(x-1)|x-a|$

（1）若$a=-1$，解方程$f(x)=1;$

（2）若函数$f(x)$在R上单调递增，求实数a的取值范围；

（3）是否存在实数a，使得$g(x)=f(x)-x|x|$在R上奇函数或是偶函数？若存在，求出a的值，若不存在，请说明理由。

25、(13 分)抛物线$E:y^2=4x$的焦点为F，准线l与x轴的交点为A ，点C在抛物线E上，以C为圆心，$|CO|$为半径作圆，设圆C与准线l交于不同的两点M,N

（1）若点C的纵坐标为2，求$\left|MN\right|$ ；

（2）若$\left|AF\right|^2=\left|AM\right|\cdot\left|AN\right|$,求圆C的半径。

参考答案

一、选择题

1、A　2、C　3、D　4、D　5、D　6、D

7、D　8、D　9、A　10、D　11、C　12、B

二、填空题

13、8　14、$\log_3 4$　15、$\dfrac{\pi}{6}$　16、$\dfrac{13}{2}$

17、$-\dfrac{17}{31}$　18、3　19、$[-1,2]$　20、$(-\infty,-\dfrac{8}{7}]$

三、解答题

21、解：（1）$a=2$

（2）由已知$\begin{cases}a+1\le 3\\ a-1\ge 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a\le 2\\ a\ge 2\end{cases}\Rightarrow a=2$

22、解：（1）$d=-1$或$d=4$

$a_n=-n+11$或$a_n=4n+6$

（2）$S_n=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}n^2+\dfrac{21}{2}n & (n\le 11)\\ \dfrac{1}{2}n^2-\dfrac{21}{2}n+110 & (n\ge 12)\end{cases}$

23、解：（1）$f(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}\dfrac{1-\cos 2\omega x}{2}-\dfrac{1}{2}\sin 2\omega x$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos 2\omega x-\dfrac{1}{2}\sin 2\omega x$

$=\cos(2\omega x+\dfrac{\pi}{6})$，$\because \dfrac{T}{4}=\dfrac{\pi}{4},\therefore T=\pi,\dfrac{2\pi}{2\omega}=\pi,\therefore \omega=1$

（2）$f(x)=\cos(2x+\dfrac{\pi}{6})$，$x\in[\pi,\dfrac{3\pi}{2}]$，$2x+\dfrac{\pi}{6}\in[2\pi+\dfrac{\pi}{6},3\pi+\dfrac{\pi}{6}]$

$f(x)$的最小值为-1，$f(x)$的最大值为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

24、解：（1）$\{x|x\le -1或x=1\}$

（2）$f(x)=\begin{cases}2x^2-(a+1)x+a & (x\ge a)\\ (a+1)x-a & (x<a)\end{cases}$，根据函数图像，知$f(x)$在$R$上单调递增，所

以$\begin{cases} \dfrac{a+1}{4} \le a \\ a+1 > 0 \end{cases} \Rightarrow a \ge \dfrac{1}{3}$

（3）由于$g(x) = x^2 + (x-1)|x-a| - x|x|$

$g(1) = 0, g(-1) = 0$，得$a = 0$或-2，

所以$a = 0$时，$g(x) = x^2 - |x|$是偶函数；当$a = -2$时，$g(x)$为非奇非偶函数。

25、解：（1）点C的坐标为$(1,2)$，圆半径$r = |OC| = \sqrt{5}$，

$\left|\dfrac{1}{2}MN\right|^2 = r^2 - (1+1)^2 = 5 - 4 = 1$，$\therefore MN = 2$

（2）设$C(\dfrac{b^2}{4}, b)$，$r^2 = \dfrac{b^4}{16} + b^2$，圆方程为$(x - \dfrac{b^2}{4})^2 + (y-b)^2 = \dfrac{b^4}{16} + b^2$

当$x = -1$时，得$y_M = b + \sqrt{\dfrac{b^2}{2} - 1}, y_N = b - \sqrt{\dfrac{b^2}{2} - 1}$，因为

$|AF|^2 = |AM| \cdot |AN|, (b + \sqrt{\dfrac{b^2}{2} - 1})(b - \sqrt{\dfrac{b^2}{2} - 1}) = 4$，化简得$b^2 = 6$，

$\therefore r^2 = \dfrac{33}{4}$，$r = \dfrac{\sqrt{33}}{2}$