

# 2022 年复旦大学外国留学生本科生入学考试大纲

## 数 学

### 一、考试要求

考试对象为报考复旦大学的外国留学生,为复旦大学各院系录取新生提供考生知识能力方面的信息。数学考试旨在考查中学数学的基础知识、基本技能和思维能力、运算能力,以及运用有关数学知识分析问题和解决问题的能力。

### 二、考试形式

#### 1、数学各部分内容在试卷中的占分比例

代数: 约 55%

三角: 约 15%

平面解析几何: 约 25%

立体几何: 约 5%

#### 2、题型比例

填空题和选择题: 占总分 60%左右

解答题: 占总分 40%左右

#### 3、考试时间及总分

时间: 150 分钟

总分: 150 分

### 三、考试内容

#### (一) 代 数

##### 1、集合与函数

- (1) 理解集合及其表示,掌握子集、交集、并集、补集的概念,了解空集和全集的意义,了解属于、包含、相等关系的意义,能掌握有关的术语和符号,能正确表示一些简单的集合。
- (2) 理解函数的概念,掌握函数的表示方法,能求一些函数的解析式和定义域。
- (3) 了解反函数的意义,会求一些简单函数的反函数。
- (4) 掌握函数的奇偶性和单调性的概念以及它们图像特征,能判断一些函数的单调性、奇偶性。并且会利用单调性求一些函数的值域。
- (5) 理解一次函数、反比例函数的概念,掌握它们的图像和性质,会求它们的解析式。理解二次函数的概念,掌握它的图像和性质,会求它的解析式及最大值和最小值,

能灵活运用二次函数的性质解决有关问题。

- (6) 理解指数与对数的概念，掌握有关的性质和运算法则。
- (7) 理解幂函数、指数函数、对数函数的概念，掌握它们的图像和性质，解决与之相关的问题。

## 2、不等式

- (1) 掌握不等式的性质及其应用，会用基本不等式求一些函数的最值。
- (2) 掌握一元一次不等式（组）、一元二次不等式的解法；会解简单的分式不等式；了解区间的概念。了解绝对值不等式的性质，会解简单的绝对值不等式。
- (3) 会解一些含参数的不等式。

## 3、数列与极限

- (1) 了解数列有关概念。
- (2) 理解等差数列与等比数列的概念，掌握等差数列与等比数列的通项及前  $n$  项和的公式，并运用公式解决有关问题。
- (3) 了解数列极限的意义和几个常见数列的极限，会利用数列极限的四则运算法则，计算一些数列的极限；掌握公比的绝对值小于 1 的无穷等比数列的所有项和的公式。

## 4、复数初步

- (1) 了解数的概念的扩展，理解复数的有关概念。
- (2) 掌握复数的四则运算，应用加法、减法运算的几何意义解决有关问题。

## 5、平面向量

- (1) 理解平面向量的概念，理解向量的加法、减法、实数与向量的乘法的定义和几何意义；
- (2) 掌握向量的坐标表示法，向量与向量的数量积的定义，掌握他们的运算法则，并且能应用它们解决一些简单问题。

## 6、排列组合、二项式定理

- (1) 了解分类计数原理和分步计数原理，了解排列组合的概念，会用排列数、组合数的计算公式，会解排列、组合的简单应用题。
- (2) 掌握二项式定理和二项式系数的性质，并能用它们计算一些简单问题。

## 7、概率

- (1) 了解随机事件及其概率；
- (2) 了解等可能事件的概率的意义，会用计数方法和排列组合基本公式计算一些等可能事件的概率；
- (3) 了解互斥事件的意义，会用互斥事件的概率加法公式，计算一些事件的概率；
- (4) 了解相互独立事件的意义，会用相互独立事件的概率乘法公式计算一些事件的概率；

- (5) 会计算在  $n$  次独立重复试验中，某件事恰好发生  $k$  次的概率。

## (二) 三角

### 8、三角比

- (1) 了解正角、负角、零角的概念，理解象限角和终边相同的角的概念，理解弧度的意义，并能正确地进行弧度和角度的换算。
- (2) 掌握任意角三角比的定义，三角比的符号，同角三角比的关系式与诱导公式。
- (3) 掌握两角和与差的余弦、正弦、正切，二倍角的正弦、余弦和正切公式，会应用它们进行计算、化简。
- (4) 掌握正弦定理、余弦定理和三角形面积公式，并应用这些公式解斜三角形。

### 9、三角函数的图像和性质

- (1) 掌握正弦函数、余弦函数的图像和性质，会用它们解决有关问题；了解正切函数的图像和性质。
- (2) 了解函数  $y = A \sin(\omega x + \varphi)$  与  $y = \sin x$  的图像之间的关系，会求函数  $y = A \sin(\omega x + \varphi)$  的周期、最大值和最小值。

## (三) 平面解析几何

### 10、直线

- (1) 掌握直线的倾斜角和斜率的概念、过两点的直线的斜率公式，两条直线的平行和垂直的判断办法。
- (2) 掌握直线方程的几种形式，会求两条直线的交点和夹角，掌握点到直线距离公式，会用他们解决有关问题。

### 11、圆锥曲线

- (1) 曲线和方程：掌握直角坐标系中的曲线与方程的关系和轨迹的概念，能够根据所给条件，选择适当的坐标系求曲线方程，并画出方程所表示的曲线。
- (2) 圆：掌握圆的标准方程和一般方程，熟练掌握直线与圆的位置关系。
- (3) 椭圆：掌握椭圆的标准方程和几何性质。能用定义解决一些问题。
- (4) 双曲线：掌握双曲线的标准方程和几何性质。能用定义解决一些问题。
- (5) 抛物线：掌握抛物线的标准方程和几何性质，能用定义解决一些问题。

## (四) 立体几何

12、理解平面的基本性质，了解空间图形在平面内的表示方法，会用斜二测画法画水平放置的平面图形的直观图。

13、了解空间两条直线的平行关系，直线平行关系的传递性；了解直线和平面，平面和平面平行的概念。掌握两个平面垂直的判定定理和性质定理。

- 14、理解异面直线的概念，掌握异面直线的夹角，垂直的概念。
- 15、掌握斜线在平面上的射影，直线和平面所成角的概念。三垂线定理及其逆定理。
- 16、了解圆柱、圆锥、球的概念和性质，掌握直柱体、锥体的侧面积和表面积以及体积，球的表面积和体积公式。

## 数 学 样 卷 ( 满 分 150 分 )

考生姓名: \_\_\_\_\_

得分: \_\_\_\_\_

一、选择题 ( 每小题 4 分, 共 48 分 )

1、已知  $A = \{x | x+1 > 0\}$ ,  $B = \{-2, -1, 0, 1\}$ , 则  $(C_R A) \cap B = ( )$

- A、 $\{-2, -1\}$       B、 $\{-2\}$       C、 $\{-1, 0, 1\}$       D、 $\{0, 1\}$

2、复数  $z = \frac{(2-i)^2}{i}$  ( $i$  为虚数单位), 则  $|z| = ( )$

- A、25      B、 $\sqrt{41}$       C、5      D、 $\sqrt{5}$

3、若某公司从五位大学毕业生甲、乙、丙、丁、戊中录用三人, 这五人被录用的机会均等, 则甲或乙被录用的概率为 ( )

- A、 $\frac{2}{3}$       B、 $\frac{2}{5}$       C、 $\frac{3}{5}$       D、 $\frac{9}{10}$

4、抛物线  $y^2 = 8x$  的焦点到直线  $x - \sqrt{3}y = 0$  的距离是 ( )

- A、 $2\sqrt{3}$       B、2      C、 $\sqrt{3}$       D、1

5、不等式  $|x^2 - 2| < 2$  的解集是 ( )

- A、 $(-1, 1)$       B、 $(-2, 2)$       C、 $(-1, 0) \cup (0, 1)$       D、 $(-2, 0) \cup (0, 2)$

6、已知  $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ , 则双曲线  $C_1: \frac{x^2}{\sin^2 \theta} - \frac{y^2}{\cos^2 \theta} = 1$  与  $C_2: \frac{y^2}{\cos^2 \theta} - \frac{x^2}{\sin^2 \theta} = 1$  的 ( )

- A、实轴长相等      B、虚轴长相等  
C、离心率相等      D、焦距相等

7、已知函数  $f(x) = \ln(\sqrt{1+9x^2} - 3x) + 1$ , 则  $f(\lg 5) + f(\lg \frac{1}{5}) = ( )$

- A、-1      B、0      C、1      D、2

8、设  $a = \log_3 6, b = \log_5 10, c = \log_7 14$ ，则 ( )

- A、 $c > b > a$                       B、 $b > c > a$   
C、 $a > c > b$                       D、 $a > b > c$

9、已知点  $A(-1,1), B(1,2), C(-2,-1), D(3,4)$ ，则向量  $\overrightarrow{AB}$  在  $\overrightarrow{CD}$  方向上的投影为 ( )

- A、 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$     B、 $\frac{3\sqrt{15}}{2}$                       C、 $-\frac{3\sqrt{2}}{2}$                       D、 $-\frac{3\sqrt{15}}{2}$

10、若  $(1-2x)^6 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_6x^6$ ，则  $|a_0| + |a_1| + |a_2| + \dots + |a_6|$  的值为 ( )

- A、1                      B、64                      C、243                      D、729

11、已知函数  $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$ ，则不等式  $xf(x-1) \leq 1$  的解集为 ( )

- A、 $[-1, +\infty)$     B、 $(-\infty, 1]$     C、 $[-1, 1]$     D、 $[1, 2]$

12、已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左焦点为  $F$ ， $C$  与过原点的直线相交于  $A, B$  两

点，连接  $AF, BF$ 。若  $|AB| = 10, |BF| = 8, \cos \angle ABF = \frac{4}{5}$ ，则  $C$  的离心率为 ( )

- A、 $\frac{3}{5}$                       B、 $\frac{5}{7}$                       C、 $\frac{6}{7}$                       D、 $\frac{4}{5}$

二、填空题 (每小题 5 分，40 分)

13、从  $n$  个正整数  $1, 2, \dots, n$  中任意取出两个不同的数，若取出的两数之和等于 5 的概率为  $\frac{1}{14}$ ，

则  $n =$  \_\_\_\_\_

14、方程  $\frac{3}{3^x - 1} + \frac{1}{3} = 3^{x-1}$  的实数解为 \_\_\_\_\_

15、在  $\triangle ABC$  中，内角  $A, B, C$  的边长分别为  $a, b, c$ ，若  $a \sin B \cos C + c \sin B \cos A = \frac{1}{2}b$ ，

且  $a > b$ ，则  $\angle B =$  \_\_\_\_\_

16、已知直三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  的 6 个顶点都在球  $O$  的球面上，若  $AB = 3, AC = 4$ ，

$AB \perp AC, AA_1 = 12$ ，则球  $O$  的半径为 \_\_\_\_\_

17、已知  $\sin \alpha = -\frac{7}{25}, \alpha \in (\pi, \frac{3}{2}\pi)$ ，则  $\tan(\alpha - \frac{\pi}{4}) =$  \_\_\_\_\_

18、若圆  $x^2 + y^2 = R^2 (R > 0)$  和曲线  $\frac{|x|}{3} + \frac{|y|}{4} = 1$  恰有六个公共点，则  $R$  的值是 \_\_\_\_\_

19、已知函数  $f(x) = -x^2 + 4x, x \in [m, 5]$  的值域是  $[-5, 4]$ ，则实数  $m$  的取值范围是 \_\_\_\_\_

20、设  $a$  为实常数， $y = f(x)$  是定义在  $R$  上的奇函数，当  $x < 0$  时， $f(x) = 9x + \frac{a^2}{x} + 7$ ，

若  $f(x) \geq a+1$  对一切  $x \geq 0$  成立，则  $a$  的取值范围为\_\_\_\_\_

三、解答题（本大题共有 5 个小题，共 62 分）

21、（12 分）已知命题  $p: x \in A = \{x | a-1 < x < a+1, x \in R\}$ ，

命题  $q: x \in B = \{x | x^2 - 4x + 3 \geq 0, x \in R\}$  .

- (1) 若  $A \cap B = \emptyset, A \cup B = R$  ,求实数  $a$  的值;
- (2) 若  $\neg q$  ( $q$  的否命题) 是  $p$  的必要条件, 求实数  $a$  的值。

22、（12 分）在公差为  $d$  的等差数列  $\{a_n\}$  中，已知  $a_1 = 10$ ，且  $a_1, 2a_2 + 2, 5a_3$  成等比数列。

- (1) 求  $d, a_n$ ;
- (2) 若  $d < 0$ ，求  $|a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_n|$

23、（12 分）设函数  $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} \sin^2 \omega x - \sin \omega x \cos \omega x$  ( $\omega > 0$ )，且  $y = f(x)$  图像的

一个对称中心到最近的对称轴的距离为 $\frac{\pi}{4}$ 。

(1) 求 $\omega$ 的值;

(2) 求 $f(x)$ 在区间 $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$ 上的最大值和最小值。

24、(13分) 已知函数 $f(x) = x^2 + (x-1)|x-a|$

(1) 若 $a = -1$ , 解方程 $f(x) = 1$ ;

(2) 若函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 求实数 $a$ 的取值范围;

(3) 是否存在实数 $a$ , 使得 $g(x) = f(x) - x|x|$ 在 $\mathbf{R}$ 上奇函数或是偶函数? 若存在, 求出 $a$ 的值, 若不存在, 请说明理由。

25、(13分) 抛物线 $E: y^2 = 4x$ 的焦点为 $F$ , 准线 $l$ 与 $x$ 轴的交点为 $A$ , 点 $C$ 在抛物线 $E$ 上,

以 $C$ 为圆心,  $|CO|$ 为半径作圆, 设圆 $C$ 与准线 $l$ 交于不同的两点 $M, N$

- (1) 若点  $C$  的纵坐标为 2, 求  $|MN|$  ;
- (2) 若  $|AF|^2 = |AM| \cdot |AN|$  , 求圆  $C$  的半径。



## 参考答案

### 一、选择题

1、A    2、C    3、D    4、D    5、D    6、D  
7、D    8、D    9、A    10、D    11、C    12、B

### 二、填空题

13、8                      14、 $\log_3 4$                       15、 $\frac{\pi}{6}$                       16、 $\frac{13}{2}$   
17、 $-\frac{17}{31}$                       18、3                      19、 $[-1, 2]$                       20、 $(-\infty, -\frac{8}{7}]$

### 三、解答题

21、解：(1)  $a = 2$

$$(2) \text{ 由已知 } \begin{cases} a+1 \leq 3 \\ a-1 \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \leq 2 \\ a \geq 2 \end{cases} \Rightarrow a = 2$$

22、解：(1)  $d = -1$  或  $d = 4$

$$a_n = -n + 11 \text{ 或 } a_n = 4n + 6$$

$$(2) S_n = \begin{cases} -\frac{1}{2}n^2 + \frac{21}{2}n & (n \leq 11) \\ \frac{1}{2}n^2 - \frac{21}{2}n + 110 & (n \geq 12) \end{cases}$$

$$23、\text{解：(1) } f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} \frac{1 - \cos 2\omega x}{2} - \frac{1}{2} \sin 2\omega x$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2\omega x - \frac{1}{2} \sin 2\omega x$$

$$= \cos(2\omega x + \frac{\pi}{6}), \because \frac{T}{4} = \frac{\pi}{4}, \therefore T = \pi, \frac{2\pi}{2\omega} = \pi, \therefore \omega = 1$$

$$(2) f(x) = \cos(2x + \frac{\pi}{6}), x \in [\pi, \frac{3\pi}{2}], 2x + \frac{\pi}{6} \in [2\pi + \frac{\pi}{6}, 3\pi + \frac{\pi}{6}]$$

$$f(x) \text{ 的最小值为 } -1, f(x) \text{ 的最大值为 } \frac{\sqrt{3}}{2}$$

24、解：(1)  $\{x | x \leq -1 \text{ 或 } x = 1\}$

$$(2) f(x) = \begin{cases} 2x^2 - (a+1)x + a & (x \geq a) \\ (a+1)x - a & (x < a) \end{cases}, \text{ 根据函数图像, 知 } f(x) \text{ 在 } \mathbf{R} \text{ 上单调递增, 所}$$

$$\text{以 } \begin{cases} \frac{a+1}{4} \leq a \\ a+1 > 0 \end{cases} \Rightarrow a \geq \frac{1}{3}$$

(3) 由于  $g(x) = x^2 + (x-1)|x-a| - x|x|$

$g(1) = 0, g(-1) = 0$ , 得  $a = 0$  或  $-2$ ,

所以  $a = 0$  时,  $g(x) = x^2 - |x|$  是偶函数; 当  $a = -2$  时,  $g(x)$  为非奇非偶函数。

25、解: (1) 点  $C$  的坐标为  $(1, 2)$ , 圆半径  $r = |OC| = \sqrt{5}$ ,

$$\left| \frac{1}{2}MN \right|^2 = r^2 - (1+1)^2 = 5 - 4 = 1, \therefore MN = 2$$

(2) 设  $C(\frac{b^2}{4}, b)$ ,  $r^2 = \frac{b^4}{16} + b^2$ , 圆方程为  $(x - \frac{b^2}{4})^2 + (y - b)^2 = \frac{b^4}{16} + b^2$

当  $x = -1$  时, 得  $y_M = b + \sqrt{\frac{b^2}{2} - 1}, y_N = b - \sqrt{\frac{b^2}{2} - 1}$ , 因为

$$|AF|^2 = |AM| \cdot |AN|, (b + \sqrt{\frac{b^2}{2} - 1})(b - \sqrt{\frac{b^2}{2} - 1}) = 4, \text{ 化简得 } b^2 = 6,$$

$$\therefore r^2 = \frac{33}{4}, r = \frac{\sqrt{33}}{2}$$